

REVUE BELGE  
DE  
NUMISMATIQUE  
ET DE SIGILLOGRAPHIE

PUBLIÉE  
SOUS LE HAUT PATRONAGE  
DE S. M. LE ROI  
PAR LA  
SOCIÉTÉ ROYALE  
DE NUMISMATIQUE DE BELGIQUE  
AVEC L'AIDE FINANCIÈRE DU  
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE  
ET DE LA CULTURE FRANÇAISE  
ET DU  
MINISTÈRE VAN NATIONALE OPVOEDING  
EN NEDERLANDSE CULTUUR

UITGEGEVEN  
ONDER DE HOGE BESCHERMING  
VAN Z. M. DE KONING  
DOOR HET  
KONINKLIJK BELGISCH  
GENOOTSCHAP VOOR NUMISMATIEK  
MET DE FINANCIËLE HULP VAN HET  
MINISTÈRE VAN NATIONALE OPVOEDING  
EN NEDERLANDSE CULTUUR  
EN HET  
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE  
ET DE LA CULTURE FRANÇAISE

DIRECTEURS :

PAUL NASTER, ÉMILE BROUETTE,  
JEAN JADOT, TONY HACKENS

CXXIII - 1977

BRUXELLES

BRUSSEL

## VALEUR STATISTIQUE DES PETITS ÉCHANTILLONS

*On a longtemps cru qu'il était impossible de tirer un parti utile de très petits échantillons — de 5 à 10 mesures par exemple — et que le domaine des statistiques était celui des mesures très nombreuses. En fait, les tests adaptés aux petits échantillons, [... s'ils sont] correctement interprétés, sont aussi rigoureux que ceux qui s'appliquent aux statistiques abondantes.*

A. VESSEREAU

*La statistique* (Coll. « Que sais-je ? »), Paris, 1962, p. 69 (1).

1. Il est fréquent que des variétés monétaires devenues rares ne soient plus représentées aujourd'hui que par quelques exemplaires connus — moins de 10 par exemple. Le soin que prennent les numismates de publier le poids de chaque exemplaire montre qu'ils attachent quelque intérêt métrologique (voire, plus ou moins consciemment statistique) à ces « petits échantillons ». Comment les traitent-ils en général de ce point de vue ?

2. Ils calculent par exemple le poids moyen ( $\bar{x}$ ) de l'échantillon (*infra*, A, § 29). 3. Il leur arrive même de comparer deux valeurs de  $\bar{x}$  pour deux échantillons différents (*infra*, B, § 41). 4. Ils se bornent parfois à mesurer l'écart entre le poids de l'exemplaire le plus léger et le poids de l'exemplaire le plus lourd, autrement dit à calculer l'étendue ( $e$ ) de l'échantillon (*infra*, C, § 59, note 47).

5. Mais ce n'est là qu'une opération préliminaire : même  $x$  est un simple intermédiaire de calcul. Le travail métrologique commen-

---

(1) En 1976 (13<sup>e</sup> édition), cet excellent petit livre d'initiation en était déjà à son 134<sup>e</sup> mille. Preuve de la réalité du « besoin statistique » parmi les non-mathématiciens : parmi eux, sans doute, beaucoup de numismates — c'est du moins à souhaiter !

$n$	95 %	99 %
4	3,182	5,841
5	2,776	4,604
6	2,571	4,032
7	2,447	3,707
10	2,262	3,250

Fig. 1. — TABLE DE STUDENT (extrait).

Colonne  $n$ , effectif des échantillons. — Colonnes 2 et 3, valeur de l'écart-réduit,  $t$  (§ 17, n. 13) pour tel effectif et pour une probabilité de non-dépassement ( $1 - P$ ) de 95 % et de 99 %.

ce là même où intervient le traitement statistique des données de base. Ce qui compte, par exemple, ce n'est nullement le poids moyen ( $\bar{x}$ ) de l'un ou de l'autre de ces petits échantillons : ce poids dépend par trop des hasards de l'échantillonnage. 6. Néanmoins il ne laisse pas d'être indispensable à connaître : c'est un des éléments qui nous informent sur le poids moyen ( $m$ ) de la *population* représentée ; or c'est  $m$  qui importe au numismate métrologiste. 7. De même pour la dispersion des poids — étude trop souvent négligée dans les publications numismatiques, et qui seule, néanmoins, permet d'estimer  $m$  d'après un échantillon. 8. La caractéristique principale est ici l'écart-type,  $s$ , d'échantillon, d'où l'on peut déduire l'écart-type  $\sigma$  de population. On calcule donc  $s$ , « indice de dispersion d'un emploi tout à fait général » (2), à partir de la variance,  $s^2$  (ou  $V$ ), dont  $s$  est la racine carrée (3).

9. Avant de passer à nos trois exemples numismatiques (*infra*, A, B et C, § 24, 33 et 55), faisons un sondage de portée tout à fait générale : dans l'ouvrage cité, A. Vessereau propose sous forme de

(2) A. VESSEREAU, *op. laud.* (1962), p. 25.

(3) La variance d'une série « est la moyenne des carrés des différences entre les observations et leur moyenne  $\bar{x}$  ». On peut faire le calcul d'après cette définition. Mais,  $s^2$  étant d'autre part « égal à la moyenne des carrés [des observations] diminuée du carré de leur moyenne,  $\bar{x}$ , un procédé plus rapide de calcul est à notre disposition : nous en donnons un exemple *infra* § 13, n. 8.

tableau (4), « les mesures de poids effectuées sur 1.000 cigarettes » (5).

10. Le poids moyen,  $\bar{x}$ , est de 1,20 g (6), et l'écart-type,  $s$ , de 0,063 g.

11. Constituons, au hasard, un petit échantillon ( $a$ ) de 5 cigarettes, puis un autre petit échantillon ( $b$ ) de 10 cigarettes (différentes) tirées au sort (7) dans la population des 1000 du grand échantillon.

12. Le premier tirage nous a donné les 5 poids suivants, en grammes : 1,11 ; — 1,17 ; — 1,17 ; — 1,21 ; — 1,25.

13. Étendue,  $e_a = 0,14$  g. Poids moyen,  $\bar{x}_a = 1,18$  g. Variance,  $s_a^2 = 0,002$  (8). Écart-type,  $s_a = 0,05$  g. Coefficient de variation,  $\gamma_a = 0,04$  (9).

(4) *La statistique* (1962), p. 24-25 ; (1976), p. 21-22.

(5) Les poids sont répartis en 16 classes de 0,02 g d'étendue, dans l'ordre croissant. La première classe a pour limites en g, 1,04 — [1,06 ; centre de classe, 1,05 ; — la seizième classe, 1,34 — [1,36 ; centre de classe, 1,35.

(6) *Op. laud.* (1962), p. 24 ; (1976), p. 21 : « la moyenne exacte est de 1,20036 g ». Dans l'énoncé de nos résultats, nous arrondissons aussi (en général, au cg).

(7) Nous avons eu recours au tableau de « nombres au hasard » donné dans les *Tables statistiques* du Centre de formation aux applications industrielles de la statistique, publiées par l'Institut de statistique de l'Université de Paris, table 9 (II, 27sqg.). Le point de départ a été tiré au sort (= page 1, ligne 2, colonne 1), nous donnant les groupes suivants : 50230, 63237, 94083, 93634 et ainsi de suite, jusqu'à 91619 — soit 9 groupes de 5 chiffres. En regroupant ces 45 chiffres à la suite, trois par trois, on obtient 15 groupes : les 5 premiers groupes sont 502, 306, 323, 794 et 083. Dans le classement des 1000 cigarettes du tableau d'A. Vessereau, nous avons pris ces cinq nombres comme les numéros d'ordre des 5 cigarettes appelées à constituer le premier échantillon. — Le deuxième échantillon (dix cigarettes) a été constitué en prenant les 30 chiffres de la table, à la suite, jusqu'au nombre 619. — Chaque cigarette ainsi désignée par le sort entre nécessairement dans l'une des 16 classes de poids du tableau d'A. Vessereau. Le poids d'aucun exemplaire ne nous étant exactement connu, nous l'avons arrondi à la valeur centrale de la classe à laquelle il appartient.

(8) Voici un exemple du calcul pratique de la variance (voir *supra*, n. 3) :

1°) la somme des carrés des 5 poids est  $1,11^2 + 1,17^2 + 1,17^2 + 1,21^2 + 1,25^2 = 6,9965$  ;

2°) le carré moyen est  $6,9965/5 = 1,3993$  ;

3°) d'autre part, le carré de la moyenne  $\bar{x}$  est  $1,182^2 = 1,397124$  ;

4°) la variance  $s^2$  est égale au carré moyen diminué du carré de la moyenne, soit  $1,3993 - 1,397124 = 0,002176$  ;

5°) l'écart-type  $s$  est à la racine carrée de la variance, soit  $\sqrt{0,002176} = 0,0466476 \simeq 0,047$ .

(9)  $\gamma_a = s_a / \bar{x}_a = 0,0466476/1,182 = 0,0394649$ .

14. Le deuxième tirage nous a donné les 10 poids suivants, en grammes : 1,07 ; — 1,13 ; — 1,15 ; — 1,17 ; — 1,17 ; — 1,21 ; — 1,21 ; — 1,23 ; — 1,25 ; — 1,29.

15. Étendue,  $e_b = 0,22$  g. Poids moyen,  $\bar{x}_b = 1,19$  g. Variance,  $s^2_b = 0,004$ . Écart-type,  $s_b = 0,06$  g. Coefficient de variation,  $\gamma_b = 0,05$  <sup>(10)</sup>.

16. Par rapport à l'échantillon  $a$ , l'étendue  $e$  augmente avec l'effectif <sup>(11)</sup>. La moyenne,  $x_b$  est plus proche que la moyenne  $x_a$  de la moyenne,  $m$ , (1,20 g) de population. L'écart-type,  $s_b$ , est plus proche que l'écart-type  $s_a$  de l'écart-type (0,063 g) de population. Le coefficient de variation,  $\gamma_b$ , est plus proche que le coefficient  $\gamma_a$  du coefficient  $\gamma_p$  de population (0,053) <sup>(12)</sup>.

17. D'après ces deux échantillons d'effectif  $n_a = 5$  et  $n_b = 10$ , on peut estimer les bornes inférieure (respectivement  $I_a$  et  $I_b$ ) et supérieure ( $S_a$  et  $S_b$ ) de l'intervalle dans lequel se trouve la moyenne  $m$  de population, avec une probabilité  $(1 - P)$  de, par exemple, 99 % (= 0,99), puis de 95 % (= 0,95) <sup>(13)</sup>.

18. Soit  $E_a$  l'écart entre  $S_a$  et  $I_a$  et  $E_b$ , l'écart entre  $S_b$  et  $I_b$  : dans le tableau ci-contre, les valeurs arrondies sont indiquées en grammes, aux lignes S, I, E (fig. 2).

(10) Voir la note précédente.

(11) Pour la population des 1000 cigarettes, l'étendue se situe entre 0,28 et 0,32 g.

(12)  $\gamma_a = 0,0394$  ;  $\gamma_b = 0,0507$  ;  $\gamma_p = 0,0527$ .

(13) La formule est  $I = \bar{x} - A$  et  $S = \bar{x} + A$ , dans laquelle  $A = t s / \sqrt{n - 1}$ . Trois de ces quatre symboles sont déjà connus :  $\bar{x}$  désigne la moyenne ;  $s$ , l'écart-type et  $n$ , l'effectif. Reste l'écart réduit,  $t$ . S'agissant ici de petits échantillons, la valeur de  $t$  nous est donnée par la table de Student pour un effectif et une probabilité donnés : par exemple, pour une probabilité  $1 - P = 0,95$  (95 % de chances que  $m$  se trouve entre I et S), on a  $t = 2,776$  pour  $n = 5$  et  $t = 2,262$  pour  $n = 10$  ; — pour une probabilité  $1 - P = 0,99$ , on a  $t = 4,604$  pour  $n = 5$  et  $t = 3,250$  pour  $n = 10$  (voir *supra*, fig. 1, l'extrait de la table de Student).

	1 - P = 99%		1 - P = 95%	
<i>n</i>	$n_a = 5$	$n_b = 10$	$n_a = 5$	$n_b = 10$
S	$S_a = 1,289$	$S_b = 1,253$	$S_a = 1,247$	$S_b = 1,233$
I	$I_a = 1,075$	$I_b = 1,123$	$I_a = 1,118$	$I_b = 1,143$
E	$E_a = 0,215$	$E_b = 0,131$	$E_a = 0,129$	$E_b = 0,091$

Fig. 2. — INTERVALLES DE CONFIANCE (§ 17-18) de la moyenne ( $m$ ) de population, d'après nos deux échantillons  $a$  et  $b$  (§ 11).

S = borne supérieure ; I = borne inférieure ; E = écart entre S et I.  
 Pour  $n = 1000$  (§ 9), E est de l'ordre de 0,010 g pour  $1 - P = 99 \%$   
 et de l'ordre de 0,008 pour  $1 - P = 95 \%$

19. Nous avons tiré nos deux échantillons de 5 et de 10 cigarettes du même ensemble. Si nous ne le savions pas, le test de Student <sup>(14)</sup> nous permettrait de répondre que rien ne s'oppose à cette hypothèse.

20. Par observation, et par une sorte d'expérimentation, nous venons de constater que nos deux petits échantillons de cigarettes ont une manière de représentativité intéressante (l'échantillon le plus nombreux présentant, comme on pouvait s'y attendre, des caractéristiques plus proches des caractéristiques de population). Mais nous connaissions d'avance les paramètres de l'ensemble (ou population) dont nous avons tiré ces deux échantillons. 21. Nous savions aussi que cette population était normale, donc symétrique (coefficient  $b_1$ , proche de 0 ;  $b_1 = -0,006$ ) et possédant un coefficient  $b_2$  proche de 3 ( $b_2 = 2,765$ ) <sup>(15)</sup>. — 22. Passons aux monnaies : il

(14) Voir *infra*, en fin d'article, la *Note sur le test de Student*, premier exemple, § 73-81.

(15) Le coefficient d'asymétrie  $b_1$  est égal au rapport du moment centré du 3<sup>e</sup> ordre avec le produit de la variance par l'écart-type. Le moment centré du 3<sup>e</sup> ordre  $m'_3$  est la moyenne du cube des différences entre les observations et leur

s'agit à présent de traiter de petits échantillons — de formation, selon toute apparence, aléatoire <sup>(16)</sup> — dont chacun appartient sans doute avec la plus grande probabilité à une seule et même population numismatique <sup>(17)</sup>. — 23. Mais les valeurs caractéristiques qui « résument » ces divers ensembles sont, ici, inconnues : il s'agit d'estimer le moins inexactement possible, et d'après nos seuls échantillons, ces paramètres de population.

Nous proposons les trois échantillons suivants :

A. 24. Six (ou sept) petits bronzes à la légende ΡΩΜΑΙΩΝ, frappés à Naples, après 326 avant J.-C.

25. Tête d'Apollon laurée, à droite.

π. Avant-train d'un taureau à tête humaine, courant à droite.

Légende horizontalement, au dessus <sup>(18)</sup>.

26. Coins de droit, 6 ; coins de revers, 7 (M. Crawford) <sup>(19)</sup>.

27. Poids en grammes : 2,48 ; — 2,54 ; — 3,14 ; — 3,20 ; — 3,55 ; — 4,85 <sup>(20)</sup> ; — 4,87. 28. Ce dernier exemplaire nous est connu par L. Sambon <sup>(21)</sup>, et n'a pas été retenu dans sa liste par M. von

moyenne  $\bar{x}$ . Dans le cas d'une distribution symétrique,  $m_3$  est égal à 0. On a donc aussi  $b_1 = 0$ . — Le coefficient d'aplatissement  $b_2$  est égal au rapport du moment centré du 4<sup>e</sup> ordre avec le carré de la variance. Ce moment est égal à la moyenne des différences entre les observations et leur moyenne  $\bar{x}$  élevées à la puissance 4. — Des tables indiquent si, pour tel effectif d'échantillon,  $b_1$  et  $b_2$  restent compatibles avec l'hypothèse de symétrie et de normalité de la dispersion.

(16) La résultante de tous les hasards qui ont produit ces échantillons peut être assimilée à un tirage au sort. — Pour la normalité des petits échantillons, voir *infra*, § 72, 80-81.

(17) Les pièces qui composent ces petits échantillons présentent notamment les mêmes caractères qualitatifs : métal, dénomination, légende, types, etc.

(18) M. von BAHRFELDT, *Le monete romano-campane*, dans *Rivista italiana di numismatica*, XII, 1899, p. 418 (pl. III, 12) ; R. THOMSEN, *ERC*, I (1958), p. 49, n. 1 et p. 51, fig. 1 ; III (1961), p. 78-80 (et n. 24) ; H. ZEHACKER, *Moneta. Recherches sur [... les] émissions monétaires de la République romaine* (1973), p. 243, 245-246, 251 (I) ; M. H. CRAWFORD, *RRC* (1974), p. 131 (I), n° 1 du catalogue et pl. I, 1/1 (tome II).

(19) L'échantillon est donc constitué de pièces brassées par la circulation (*aliter, infra*, l'échantillon C, § 57). M. Crawford inclut, notons-le bien, la pièce de L. Sambon (voir *infra*, n. 21).

(20) État de conservation, d'après M. von BAHRFELDT, *ibid.* : 2,54 g, *ossidato* ; — 3,55 g, *di buona conservazione* ; — 4,85 g, *di buonissima conservazione*.

(21) *Recherches sur les monnaies de la presqu'île italique [...]*, 1870, p. 133 ; cf. M. von BAHRFELDT, *art. laud.*, p. 419.

Bahrfeldt, qui toutefois en fait mention. Nous étudierons donc deux échantillons, l'un ( $A_1$ ) de 6 ; l'autre ( $A_2$ ), de 7 exemplaires.

29. Étendue,  $e_{A_1} = 2,37$  g ;  $e_{A_2} = 2,39$  g. Poids moyen,  $\bar{x}_{A_1} = 3,29$  g ;  $\bar{x}_{A_2} = 3,52$  g. Variance,  $s^2_{A_1} = 0,63$  ;  $s^2_{A_2} = 0,84$ . Écart-type,  $s_{A_1} = 0,79$  g ;  $s_{A_2} = 0,92$  g. Coefficient de variation,  $\gamma_{A_1} = 0,24$  ;  $\gamma_{A_2} = 0,26$  g.

30. Estimation des bornes inférieure ( $I_{A_1}$ ) et supérieure ( $S_{A_1}$ ) de l'intervalle de confiance dans lequel se trouve  $m_{A_1}$ , moyenne actuelle de la population d'après l'échantillon  $A_1$ , avec la probabilité de  $1 - P = 99\%$  ( $= 0,99$ ), puis de  $1 - P = 95\%$  ( $= 0,95$ ). Écart  $| I_{A_1} - S_{A_1} |$ . — Estimation correspondante de la moyenne actuelle  $m_{A_2}$  d'après l'échantillon  $A_2$ .

31. On a <sup>(22)</sup> pour la probabilité 99 %,  $I_{A_1} = 1,87$  g ;  $S_{A_1} = 4,72$  g ; écart  $| I_{A_1} - S_{A_1} | = 2,85$  ; et  $I_{A_2} = 2,13$  g ;  $S_{A_2} = 4,91$  g ; écart  $| I_{A_2} - S_{A_2} | = 2,78$  g ; 32. pour la probabilité 95 %,  $I_{A_1} = 2,38$  g ;  $S_{A_1} = 4,20$  g ; écart  $| I_{A_1} - S_{A_1} | = 1,82$  g ;  
et  $I_{A_2} = 2,60$  g ;  $S_{A_2} = 4,43$  g ; écart  $| I_{A_2} - S_{A_2} | = 1,83$  g.

B. 33. *Quatre petits bronzes à la légende ROMA, frappés sans doute à Lucéria* (et récemment rapprochés de l'échantillon  $A_1$  comme ayant même poids moyen).

34. Tête d'Hercule jeune, à droite, couverte de la peau de lion ; massue. Lettre  $\iota$  [ = *L(uceria)* ?].

$\text{IV}$  Pégase volant à droite ; au dessus, lettre  $\varepsilon$  ; au dessous, *Roma* <sup>(23)</sup>.

35. Poids en grammes : 2,80 ; — 3,27 ; — 3,47 ; — 3,63 <sup>(24)</sup>.

(22) Pour la formule du calcul, voir *supra*, § 17, n. 13.

(23) M. VON BAHRFELDT, *Le monete romano-campane*, dans *Rivista italiana di numismatica*, XIII, 1900, p. 38-39, n° 35. Le poids d'une cinquième pièce est inconnu.

(24) État de conservation, d'après M. VON BAHRFELDT, *ibid.* : 2,8 g, *di discreta conservazione* ; — 3,27 g, *di buonissima conservazione* ; — 3,47 g, *di ottima conservazione*.

36. Étendue,  $e = 0,83$  g. Poids moyen,  $\bar{x} = 3,29$  g. Variance,  $s^2 = 0,10$ . Écart-type,  $s = 0,31$  g. Coefficient de variation,  $\gamma = 0,09$ .

37. D'après cet échantillon, les bornes inférieure (I) et supérieure (S) de l'intervalle de confiance dans lequel se trouve  $m$ , moyenne *actuelle* de la population, peuvent être estimées comme suit, avec la probabilité de  $1 - P = 99\%$  ( $= 0,99$ ), puis de  $95\%$  ( $= 0,95$ ).

38. On a <sup>(25)</sup>, pour la probabilité  $99\%$ ,  $I = 2,24$  g ;  $S = 4,34$  ; écart  $|I - S| = 2,10$  g ; 39. pour la probabilité  $95\%$ ,  $I = 2,72$  ;  $S = 3,86$  g ; écart  $|I - S| = 1,14$  g.

40. Nous avons pris en considération cet échantillon B à cause d'une récente observation d'un de nos meilleurs numismates, auteur d'un livre plein de science et de goût <sup>(26)</sup> : le poids moyen de l'échantillon est le même que celui de l'échantillon  $A_1$  (*supra*, § 29). 41. Une question plus générale se pose ici : quelle est la portée de toute comparaison entre moyennes d'échantillons, surtout petits <sup>(27)</sup> ; et s'agit-il de véritables « parallèles métrologiques » ? Pour ne pas quitter notre domaine de « l'ancien monnayage de Rome », on trouvera dans l'ouvrage classique de R. Thomsen une précieuse documentation de base — tout un chapitre ! <sup>(28)</sup>. Restent d'une part le plus fastidieux <sup>(29)</sup>, et d'autre part, si l'on ose dire, le plus noble de l'ouvrage <sup>(30)</sup>. 42. Mais bornons-nous à la question de statistique à

(25) Voir *supra*, § 17, n. 13.

(26) H. ZEHNACKER, *Moneta* [...], p. 246 (I). A propos du petit bronze ΠΩΜΑΙΩΝ (= notre échantillon  $A_1$  dont  $\bar{x} = 3,29$  g : « Signalons, à titre de comparaison, que le poids moyen de la demi-litra de Lucéria » — c'est-à-dire notre échantillon B — « correspondant à la litra, ΣΥΔ(ΕΝΗΑΜ), [RRG, p. 2, n°] 7, est exactement le même ». Cf. R. THOMSEN, *ERC*, I, p. 54, 6.

(27) Les travaux sérieux (voir par exemple note suivante) prennent soin d'indiquer, à côté de la moyenne, l'effectif de l'échantillon étudié : il y a là un sentiment très juste (bien que confus) de l'importance de l'effectif pour une recherche statistique.

(28) R. THOMSEN, *ERC*, I, chapitre VI, p. 182-203.

(29) Une estimation précise de l'état de chaque exemplaire est fort difficile : l'étude des altérations demanderait de longues recherches de laboratoire (que les méthodes nucléaires faciliteront sans doute) ; quant au frai, nous manquons encore d'une échelle objective d'étalonnage quantitatif. — Pour l'ensemble du matériel dénombré par R. THOMSEN, *ibid.*, le résultat en vaut-il la peine ? On pourrait du moins, dès à présent, retenir dans ce répertoire quelques échantillons susceptibles d'une étude statistique fructueuse.

(30) Un traitement statistique des poids s'impose partout où l'excellente conservation des pièces (notamment d'or) pourra le permettre — mais là seulement ! Même ainsi, il reste beaucoup à faire.

laquelle notre sujet nous force à nous limiter ici <sup>(31)</sup> : dans quelle mesure cette égalité du poids moyen est-elle significative pour des échantillons de si faible effectif ? Le « bon sens » penserait volontiers à une coïncidence fortuite : il n'aurait pas tort (mais qu'il se défie néanmoins de lui-même). 43. Relevons pour l'instant que seul l'échantillon  $A_1$  (6 exemplaires) a la même valeur (ou presque) de  $\bar{x}$  (3,29 g) que l'échantillon B <sup>(32)</sup> : l'échantillon  $A_2$  (7 exemplaires) a un poids moyen de 3,52 g, nettement supérieur. Quant à la dispersion elle est fort différente en  $A_1$ ,  $A_2$  et B <sup>(33)</sup>. 44. Mais allons plus loin : cette différence est-elle si grande que le test de Student ne soit pas applicable ici ? Seule l'étude statistique répondra à une question que « le bon sens » ne peut que laisser en suspens, et qu'il tendrait peut-être plutôt à préjuger par la négative (test inapplicable). 45. Eh bien ! « bon sens » se tromperait cette fois ! Car, vu les faibles effectifs des échantillons  $A_1$ ,  $A_2$  et B, cette différence des dispersions n'est pas extraordinaire et n'empêche pas d'appliquer le test de Student <sup>(34)</sup> pour les deux moyennes d'échantillon de  $A_2$  et de B. Or, ce test permet de ne pas rejeter l'hypothèse d'égalité des moyennes de ces mêmes échantillons.

46. On peut regrouper alors les échantillons  $A_2$  et B, et calculer un intervalle d'estimation de la moyenne de la population d'où sont tirés ces deux échantillons :

47. Estimation des bornes inférieure ( $I_{A_2 + B}$ ) et supérieure ( $S_{A_2 + B}$ ) de l'intervalle de confiance dans lequel se trouve  $m_{A_2 + B}$

(31) Les petits bronzes qui forment nos échantillons A et B sont des *demi-litrai*, selon R. THOMSEN et H. ZEHNACKER. La *litra* nous est connue par un échantillon de 36 pièces (SYDENHAM, RRC, n° 7) de poids moyen  $\bar{x} = 6,23$ . Cette unité correspond aux « demis » qui composent notre échantillon B (mêmes types). Mais nous sortirions de notre propos en soumettant à une étude statistique (qui reste à faire ici aussi) cet échantillon de plus de 10 unités.

(32)  $\bar{x}_{A_1} = 3,29333$  g ;  $\bar{x}_B = 3,2925$ .

(33) Étendue,  $e_{A_1} = 2,37$  g ;  $e_{A_2} = 2,39$  g d'une part ; —  $e_B = 0,83$ , d'autre part. Écart-type,  $s_{A_1} = 0,79$  g ;  $s_{A_2} = 0,92$  g d'une part ; —  $s_B = 0,312$  d'autre part. Coefficient de variation,  $\gamma_{A_1} = 0,24$  g ;  $\gamma_{A_2} = 0,26$  g d'une part ; —  $\gamma_B = 0,095$  d'autre part.

(34) Voir *infra*, en fin d'article, la *Note sur le test de Student*, deuxième exemple, § 82-87.

moyenne de la population d'après les échantillons  $A_2$  et B avec la probabilité de  $1 - P = 99 \%$ , puis de  $1 - P = 95 \%$ .

48. On a, pour la probabilité  $99 \%$ ,  $I_{A_2 + B} = 2,61 \text{ g}$ ;  $S_{A_2 + B} = 4,26 \text{ g}$ ; écart  $|S_{A_2 + B} - I_{A_2 + B}| = 1,64$ .

49. Pour la probabilité  $95 \%$ ,  $I_{A_2 + B} = 2,86 \text{ g}$ ;  $S_{A_2 + B} = 4,01 \text{ g}$ ; écart  $|S_{A_2 + B} - I_{A_2 + B}| = 1,14$ .

50. Estimés par le seul calcul de l'erreur aléatoire, ces intervalles sont assez larges; on peut dire: il y a  $95 \%$  de chances que l'intervalle  $|2,61 - 4,26|$  recouvre la vraie moyenne *actuelle* ( $m_1$ ) de la population d'où a été tiré cet échantillon « composite » ( $A_2 + B$ ) <sup>(35)</sup>.

51. Les deux variétés  $A_2$  et B peuvent donc avoir même moyenne  $m_2$  d'émission —  $m_2$  étant vraisemblablement supérieur à  $m_1$  <sup>(36)</sup> et pas forcément égal lui-même au poids droit  $m_3$  ou poids légal de l'émission.

52. Concluons sur ce point en insistant sur cette difficulté. Les calculs qui viennent d'être faits de *l'erreur aléatoire* ne sauraient nous être reprochés, si nous mettons bien le lecteur en garde: *l'erreur systématique* est certainement bien supérieure <sup>(37)</sup>, mais nous ne savons trop comment l'estimer. Aussi bien M. von Bahrfeldt, notre auteur, s'est-il borné à calculer des moyennes d'échantillon *actuelles* (*supra*, § 28 et 30; § 36-37) sans soulever surprise ni contradiction <sup>(38)</sup>.

53. Une erreur au bout d'un calcul court serait-elle moins grave qu'une erreur au bout d'un calcul long <sup>(39)</sup>? Au vrai, ces deux sortes d'erreur ont même cause et même nature. Toutefois les erreurs en quelque sorte immédiates qui se commettent sur les moyennes d'échantillon sont plus fallacieuses; car (ne faisant intervenir ni

(35) Voir *supra*, § 27; § 28; § 35.

(36) L'effet des altérations chimiques, nous écrivait M. J. W. Müller, physicien au B.I.P.M. (Pavillon de Breteuil), est « presque impossible à estimer actuellement: même le signe du changement de poids n'est pas évident ». Les « apports » (oxydations par exemple) suffisent-ils à compenser les pertes dues au frai?

(37) ... à l'erreur aléatoire.

(38) C'est sans doute un bienfait de l'étude statistique, d'avoir mieux attiré l'attention sur ces écarts entre  $m_1$  et  $m_2$  (voir *supra*, § 50-51).

(39) Ce calcul statistique méritait de toute manière d'être exposé: il est d'intérêt général.

la notion de population, ni celle d'intervalle de confiance) elles se parent d'une vaine précision et peuvent prêter à d'illusoires rapprochements (40).

54. Ce qui limite la portée de l'étude statistique de nos échantillons  $A_1$ ,  $A_2$  et B, ce n'est donc pas la faiblesse de l'effectif ; c'est le mauvais état des petits bronzes qui les composent. Pour supprimer cet inconvénient, examinons à présent un troisième petit échantillon, mais de lourdes pièces d'or, celui-ci, et admirablement conservées.

C. 55. Six « médallions d'or » de Claude-le-Gothique, frappés à Milan (22 mars 268-6 septembre 269 après J.-C.) (41).

56. « Buste cuirassé et diadémé, à droite ; IMP. C. M. AVRIL [sic !] CLAVDIVS. P. F. AVG. »

FR. « La Concorde debout de face, tenant deux enseignes surmontées d'un aigle ; CONCORD IA. EX ERCITVS (42).

57. Coins de droit, 1 ; coins de revers, 2 (43).

58. Poids en grammes (suivis entre parenthèses du n° du catalogue) (44) : 38,26 (12) ; — 38,60 (11) ; — 38,65 (10) ; — 38,80 (9) ; — 38,85 (8) ; — 39,35 (7) (45). « Toutes les pièces sont à l'état fleur de coin » (46).

(40) Voir *supra*, § 3, 41-45.

(41) Dates proposées par J. LAFAURIE, *Chronologie des Empereurs gaulois*, dans *Revue numismatique*, 6<sup>e</sup> série, VI, 1964, p. 118 (tableau).

(42) J. LAFAURIE, *Trésor d'un navire romain trouvé en Méditerranée* [« près des côtes de la Corse », *art. laud.* p. 81], dans *Revue numismatique*, 6<sup>e</sup> série, I, 1958, p. 79-104 (planches VIII-X), particulièrement *Catalogue*, p. 101, nos 7-10 et 11-12. Nous empruntons à cette étude magistrale la description des pièces et, notamment, l'attribution à l'atelier de Milan. Comme l'a relevé J. Lafaurie, les points entre les mots sont à la hauteur du haut des lettres (certains à mi-hauteur) : c'est là que notre lecteur voudra bien les imaginer.

(43) Les exemplaires 7-10 du catalogue ont même coin de droit et même coin de revers. Les exemplaires 11 et 12 sont rattachés au groupe précédent par le même coin de droit ; mais ils ont tous les deux un même coin de revers, différent du coin 7-10. Ces liaisons montrent que ces « médallions » ont fort peu circulé.

(44) Les deux exemplaires les plus légers (11 et 12) ont un couplage des coins différent des autres exemplaires ; voir note précédente.

(45) Les poids n'ont pas été changés par le « chauffage intense » (incendie sans doute du navire) qu'ont subi certains exemplaires (par exemple le n° 11) : il n'y a pas eu perte de matière, J. LAFAURIE, *ibid.*

(46) J. LAFAURIE, *art. laud.*, p. 81.

59. Étendue,  $e = 1,09$  g (47). Poids moyen,  $\bar{x} = 38,75$  g. Variance,  $s^2 = 0,11$ . Écart-type,  $s = 0,33$  g. Coefficient de variation,  $\gamma = 0,008$ .

60. Les bornes inférieure (I) et supérieure (S) de l'intervalle de confiance dans lequel se trouve  $m$ , moyenne de population d'après cet échantillon, peuvent être estimées comme suit, avec la probabilité de  $1 - P = 99$  % (= 0,99), puis de  $1 - P = 95$  % (= 0,95).

61. On a (48), pour la probabilité 99 %,  $I = 38,16$  g ;  $S = 39,34$  g ; écart  $I - S \mid = 1,18$  g ; et 62. pour la probabilité 95 %,  $I = 38,37$  g ;  $S = 39,13$  g ; écart  $\mid I - S \mid = 0,75$  g.

63. Selon J. Lafaurie (49), « la taille peut en être sensiblement évaluée à 1/8 de livre. Le poids normal serait [alors] 40,93 g ou 40,07 g [lire : 40,32 g] suivant qu'on admet le poids traditionnel de 327,45 g pour la livre, ou celui de 322,56 proposé par Lucien Naville » (50). 64. En multipliant par 8 les valeurs trouvées ci-dessus pour l'estimation des quatre seuils, on obtient une livre pesant entre 305,28 et 314,72 g, pour l'intervalle d'estimation au seuil de probabilité de 99 % ; — et une livre pesant entre 306,96 et 313,04 g, pour l'intervalle d'estimation au seuil de 95 % (51). 65. Y a-t-il un faiblage systématique de ce médaillon supposé d'un huitième de livre (52) ? On le croirait volontiers, si telle est bien la taille. Est-ce là (environ 5 %) ce qu'on eût appelé au Moyen-Age brassage + seigneuriage ?

(47) J. LAFAURIE, *art. laud.*, p. 95, « écart peu important ». Relevons ici, pour la rareté du fait, le calcul d'une caractéristique de dispersion. Mais l'étendue dépend beaucoup de l'échantillonnage ; le paramètre essentiel est la valeur de l'écart-type,  $s = 0,33$  g. Cette valeur ne « chiffre » pas un ajustage de nos médaillons (beaucoup plus lourds, il est vrai) qui soit remarquable par rapport à des échantillons de *solidi* ; voir *Bulletin Société française de numismatique*, juillet 1974, p. 621 :  $s = 0,032$  ;  $s = 0,027$ ,  $s = 0,038$ .

(48) Voir *supra*, § 17, n. 13.

(49) *Art. laud.*, p. 95.

(50) On se gardera, bien entendu, de mettre aux prises, comme en un combat singulier, ces deux estimations de la livre romaine ; voir J. GUEY, *Peut-on estimer la livre romaine au cg près ? Non*, dans *Revue numismatique*, 6<sup>e</sup> série, XVIII, 1976, p. 110-114.

(51) Il n'y a pas de meilleure, il n'y a même pas d'autre méthode que cette estimation des « fourchettes » pour juger d'après les monnaies du poids de la livre romaine.

(52) Noter que les 35 autres pièces d'or de ce même trésor (des *aurei* contemporains, de poids extrêmement dispersés) valaient leur pesant d'or : la valeur libératoire en « était laissée à l'appréciation des balances », écrit joliment J. LAFAURIE, *art. laud.*, p. 94.

Non, pensons-nous. 66. Il serait remarquable que ces médaillons du troisième siècle après J.-C. nous apportent la preuve que telle estimation de la livre romaine d'après le poids des espèces d'or, même à fleur de coin, doit être tenue pour une valeur minimum. Mais ... voir n. 52.

67. Que conclure à présent, au total? Au moins ceci. La statistique métrologique n'a pas grand-chose à tirer d'un grand nombre des pièces ou des échantillons monétaires tels qu'ils nous sont parvenus (cf. *supra*, nos échantillons A et B, § 24 et 33). Sont en revanche d'un grand profit, les échantillons composés de pièces, d'or de préférence, en très bon état (cf. *supra*, notre échantillon C, § 55). La description des exemplaires ne sera jamais trop précise (altérations, mutilations, frai etc.) ; quant à la description des échantillons, elle comportera toujours — outre les indications familières aux numismates, de l'effectif,  $n$ , et du poids moyen,  $\bar{x}$  — la valeur de la variance ( $V = s^2$ ) et celle de l'écart-type,  $s$ . S'il s'agit d'échantillons nombreux, on s'assurera de leur normalité (53).

68. Mais le véritable objet de la numismatique pondérale, ce ne sont pas les échantillons, ce sont les populations d'où ces échantillons sont tirés : *seule* la démarche statistique permet de remonter des échantillons aux ensembles qu'ils représentent. Ce traitement mathématique relève donc de plein droit de la science des monnaies, à laquelle il apporte son incontestable contribution. 69. Ce qui importe au numismate, c'est par exemple le poids d'une émission (c'est-à-dire un poids  $m$  de population). La comparaison — sans plus — des moyennes d'échantillon,  $x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3...$  ne peut en général mener à rien, si ce n'est quelquefois à des rapprochements spécieux. Et le danger de ces moyennes est, dans ce qui paraît les recommander, leur précision même (voir *supra*, § 53). 70. Les « parallèles métrologiques » ne sont donc valables qu'après une étude plus élaborée des données de base — par exemple la comparaison des variances par le test de Fisher. Ici comme ailleurs, la statistique rectifie des erreurs, dissipe des illusions. *Elle dégage des faits*.

71. Ces méthodes sont fécondes, même appliquées à des échantillons d'effectif très réduit ; ce que nous avons voulu montrer par quelques exemples.

---

(53) Voir *infra*, § 81 ; pour la méthode, voir *supra*, § 21, n. 15.

## NOTE SUR LE TEST DE STUDENT

72. Le test de Student est fondé sur la valeur de la différence des moyennes des échantillons étudiés. Il n'est applicable que moyennant certaines conditions : il faut, pour l'utiliser, que l'on puisse considérer que les échantillons ont sensiblement la même variance, ou plutôt qu'ils proviennent de deux populations de variances égales, et, de plus, distribuées suivant une loi de Laplace-Gauss (ou loi normale).

73. *Premier exemple* : nos deux échantillons  $a$  et  $b$  de 5 et 10 cigarettes (voir *supra*, § 12, 14 et 19).

1) 74. *Les variances des populations.*

Soit  $s_a^2$  et  $s_b^2$  les variances des deux échantillons  $a$  et  $b$ . On peut estimer les variances  $\sigma_a^2$  et  $\sigma_b^2$  des populations d'où sont tirés les échantillons  $a_2$  et  $b_2$  (d'effectif  $n_a = 5$  et  $n_b = 10$ ) par  $s_a'^2 = \frac{5\sigma_a^2}{4}$  et par  $s_b'^2 = \frac{10\sigma_b^2}{9}$ ; ici  $s_a'^2 = 0,0027$  et  $s_b'^2 = 0,0040$ .

75. Le test de Fisher permet de tester l'hypothèse  $\sigma_a^2 = \sigma_b^2$ . Il suffit de calculer le rapport  $F = s_b'^2$ , et de consulter la table de Fisher (54). Ici  $F = \frac{0,0040}{0,0027} = 1,48$ .

76. La table est établie pour les valeurs de  $F$  supérieures à 1 : il convient de porter au numérateur de  $F$  la plus grande des deux variances  $s_a'^2$  et  $s_b'^2$ . La lecture de la table à l'intersection de la colonne 9 et de la ligne 4 (9 + 4 degrés de liberté) nous apprend que dans le cas d'égalité des variances  $\sigma_a^2$  et  $\sigma_b^2$ , il y a 5 % des cas où  $F$  est supérieur à 4. La valeur de  $F$  constatée ici, 1,48, n'est donc pas surprenante dans le cas d'égalité de  $\sigma_a^2$  et de  $\sigma_b^2$ ; et l'on peut supposer que la variance de l'échantillon  $a$  est égale à celle de l'échantillon  $b$ .

---

(54) B. C. VAN DER WAERDEN, *Statistique mathématique*, 1967, p. 350.

2) 77. La différence absolue ( $d$ ) des moyennes des deux échantillons  $a$  et  $b$ .

On a ici  $d = |\bar{x}_b - \bar{x}_a| = 1,188 - 1,182 = 0,006$ . La variance de  $d$  s'écrit :  $(5 \times s_a^2 + 10 \times s_b^2) \times (\frac{1}{5} + \frac{1}{10})$ , soit :

$$\text{Var}(d) = (5 \times 0,002176 + 10 \times 0,003636) \times (\frac{1}{5} + \frac{1}{10}) = 0,04724 \times \frac{15}{50} = 0,014172.$$

78. Le nombre des degrés de liberté  $l = 10 + 5 - 2 = 13$ . L'indicateur de Student  $t$  est donné par la formule :

$$t = d / \sqrt{\text{Var}(d) / l}. \text{ Ici, } t = 0,006 / \sqrt{0,014172/13} = \frac{0,006}{0,0333} = 0,18.$$

79. La table de Student nous montre que, pour treize degrés de liberté, dans le cas où les moyennes de population  $m_a$  et  $m_b$  sont égales, il y a au moins 95 % des cas pour lesquels la différence  $d$  est inférieure à 2,16. Nous ne serons donc pas surpris d'avoir obtenu 0,18, et ne rejeterons pas l'hypothèse que les moyennes des populations  $m_a$  et  $m_b$  sont égales.

80. En conclusion, les échantillons  $a$  et  $b$  peuvent être considérés comme provenant de populations de même moyenne et de même écart-type. Si, de plus, on suppose que ces populations sont distribuées suivant une loi de Laplace-Gauss (distribution normale), cela suffit pour admettre que les échantillons proviennent de la même population. 81. Nous ne vérifierons pas ici la normalité des échantillons  $a$  et  $b$  ; car, pour les échantillons de faible effectif (moins de 20 exemplaires), l'accord avec la loi normale paraît presque toujours admissible. Il serait cependant possible de faire cette vérification.

Ce qui vient d'être dit permet d'être plus bref pour la suite, en reprenant l'exposé dans le même ordre.

82. *Deuxième exemple* : nos trois échantillons  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B$ , de 6, de 7 et de 4 petits bronzes (voir *supra*, § 43).

1) 83. *Les variances des populations.*

(a) Pour les échantillons  $A_1$  et  $B$ , le rapport  $F = s_{A_1}^2 / s_B^2 = \frac{0,750}{0,129} = 5,79$ , avec 5 et 3 degrés de liberté ( $n_{A_1} = 6$  ;  $n_B = 4$ ).

Nous cherchons dans la table de Fisher à l'intersection de la colonne 5 et de la ligne 3 : si les variances des deux populations d'où sont tirés les échantillons  $A_1$  et B sont égales, il y a 5 % des cas où  $F$  est supérieur à 28,2. Trouver  $F = 5,79$  n'a donc rien de surprenant dans cette hypothèse.

(b) 84. Pour les échantillons  $A_2$  et B, le rapport  $F = s'_{A_2}{}^2 / s'_B{}^2 = \frac{0,980}{0,129} = 7,56$ , avec 6 et 3 degrés de liberté ( $n_{A_2} = 7$ ;  $n_B = 4$ ).

Au seuil de 5 %, la valeur de  $F$  est égale à 27,9. On ne rejettera pas, ici non plus, l'hypothèse que les variances des populations d'où sont tirés les échantillons  $A_2$  et B sont égales.

2) 85. La différence absolue ( $d$ ) des moyennes des échantillons  $A_2$  et B.

Cette différence est égale à

$$d = | \bar{x}_{A_2} - \bar{x}_B | = 3,518 - 3,292 = 0,226.$$

La variance de  $d$  s'écrit :

$$\text{Var}(d) = (7 \times 0,8402 + 4 \times 0,0971) \times (1/7 + 1/4) = 2,463.$$

86. Le nombre des degrés de liberté est  $l = 7 + 4 - 2 = 9$ .

L'indicateur de Student  $t = d / \sqrt{\text{Var}(d) / l}$ ;

$$\text{ici } t = 0,226 / \sqrt{2,463 / 9} = 0,43.$$

87. La table de Student (ligne 9) montre que pour 9 degrés de liberté, dans le cas où les moyennes de population  $m_{A_2}$  et  $m_B$  sont égales, il y a 5 % des cas où la différence  $d$  est supérieure à 2,26. On ne rejettera donc pas cette hypothèse de l'égalité des moyennes de ces deux populations.

## INDEX ET PLAN SOMMAIRES

Les nombres renvoient aux numéros des § (caractères gras dans le texte).

88. *Index.* — **A.** Altération du métal, mutilation, frai, 50-51, 54, 67. — **B.** Le « bon sens », 42, 44-45. — **C.** Coefficient d'aplatissement,  $b_2$ , 21 (n. 15). Coefficient d'asymétrie,  $b_1$ , 21 (n. 15). Coefficient de variation,  $\gamma$ , 13, 15, 29, 36, 59 ; calcul de  $\gamma$ , 13 (n. 9). Coins monétaires représentés (nombre des c.m.), 26, 57. — **D.** Degrés

de liberté,  $l$ , 78, 83, 84, 86-87. Dispersion, 7, 45. — **E.** Écart-réduit,  $t$ , 17 (n. 13); cf. fig. 1. Écart-type d'échantillon,  $s$ , 8, 13, 15, 29, 36, 59. Erreur aléatoire, erreur systématique, 52. Étendue, 4, 13, 15, 29, 36, 59. « Expérimentation », 20. — **F.** Faiblage, 65. Fisher (test et table de F.), 75-76, 83-84. Frai, voir *supra*, Altération. — **T.** Intervalle de confiance, 17, 18, 30-32, 37-38, 46-50, 60-62; calcul de l'i. c., 17 (n. 13); cf. fig. 2. — **L.** Livre romaine (poids de la l.r.), 63-66. — **M.** Moments centrés du 3<sup>e</sup> et du 4<sup>e</sup> ordre, 21 (n. 15). — **N.** Nombres au hasard, 11 (n. 7). Normalité (= conformité à la distribution de Laplace-Gauss), 21; normalité des petits échantillons, 80-81. **P.** « Parallèles métrologiques », 41, 70. Poids actuel, poids d'émission, poids droit, 51. Poids moyen d'échantillon,  $\bar{x}$ , 2, 3, 5, 13, 15, 29, 36, 52-53, 59, 69, 77, 85; poids moyens  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  voisins ou égaux, 3, 41-45; différence absolue  $d$  entre  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$ , 77, 85. Poids moyen de population,  $m$ , 6, 16-17, 30, 60, 79, 87; voir aussi *supra* Intervalle de confiance. — **S.** Student (test de S.), 19, 72; applicable ou non? 44-45; indicateur de S., 78, 86; table de S., 79-87; fig. 1. — **T.** Taille à la livre, 63-65. Tirage au sort, 11 (n. 7). — **V.** Variance d'échantillon,  $s^2$  (ou  $V$ ), 8, 13, 15, 29, 36, 59, 72, 77; variance de  $d$  (voir *supra* Poids moyen), 77,85; calcul de  $s^2$ , 13 (n. 8). Variance de population,  $\sigma^2$ , 72, 74, 83-84.

### 89. Plan.

Pratiques « préstatistiques », 1-8. Une expérience statistique 9-19. Échantillons numismatiques, 20-23. Premier échantillon (ΡΩΜΑΙΩΝ), 24-32. Deuxième échantillon (ROMA), 33-51. Conclusion sur ces deux échantillons, 52-54. Troisième échantillon (« médailles d'or »), 55-66. Conclusion générale, 67-71.

*Note sur le test de Student*, 72. Premier exemple, 73-81. Deuxième exemple, 82-87.

*Index sommaire*, 88. *Plan sommaire*, 89.

---